107 台大教學

1. $x_1+x_2+\cdots+x_n=L$ 之非負整數解 $\binom{n+L-1}{n-1}$

$x_1+x_2+\cdots+x_n=L+1$ 〃 $\binom{n+L+1-1}{n-1}$

$\vdots$

$x_1+x_2+\cdots x_n=H$ 〃 $\binom{n+H-1}{n-1}$

$$\sum_{i=L}^{H}\binom{n+i-1}{n-1}$$ \#

2. $\begin{cases} a_n=2a_{n-1}+3a_{n-2} \\ a_0=1,\ a_1=1 \end{cases}$

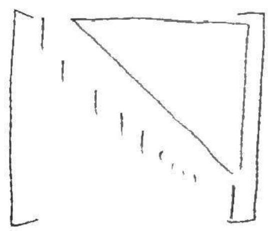
$a_n=C_1\cdot 3^n+C_2\cdot(-1)^n$

$\begin{cases} a_0=C_1+C_2=1 \\ a_1=3C_1-C_2=1 \end{cases}$ $C_1=\frac{1}{2},\ C_2=\frac{1}{2}$

$a_n=\frac{1}{2}\cdot 3^n+\frac{1}{2}\cdot(-1)^n$ \#

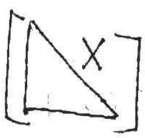
3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}n^2x^n=\frac{1+x}{(1-x)^3}$ \#

4. 二元關係表 $=\frac{m(m-1)}{2}$，共有 $2^{\frac{m(m-1)}{2}}$ 種關係 \#



5. (a) $2^{\binom{n}{2}+\binom{n}{1}}$ 種

(b) $\binom{\frac{n(n+1)}{2}}{m}$ 種

(b) 考慮二元關係表  因為是無向圖

6. $t^2=\begin{bmatrix}6&10\\5&11\end{bmatrix},\ t^3=\begin{bmatrix}22&42\\21&43\end{bmatrix},\ t^4=\begin{bmatrix}86&170\\85&171\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}86&170\\85&171\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}22&42\\21&43\end{bmatrix}-6\begin{bmatrix}6&10\\5&11\end{bmatrix}+7\begin{bmatrix}2&2\\1&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-2\\-1&-1\end{bmatrix}$$ \#

8.

$h_1(x)=1 \quad \langle h_1,h_1\rangle=1$

$h_2(x)=t-\frac{\frac{1}{2}}{1}\cdot 1=t-\frac{1}{2} \quad \langle h_2,h_2\rangle=\frac{1}{12}$

$h_3(x)=t^2-\frac{1/3}{1}\cdot 1-\frac{1/12}{1/12}(t-\frac{1}{2})=t^2-\frac{1}{3}-t+\frac{1}{2}=t^2-t+\frac{1}{6}$

$\langle h_3,h_3\rangle=\frac{1}{180}$

$$\text{Proj}_{h(x)}\,t^3=\frac{1/4}{1}\times 1+\frac{3/40}{1/12}\times(t-\frac{1}{2})+\frac{1/120}{1/180}(t^2-t+\frac{1}{6})$$

$$=1/4+\frac{9}{10}t-\frac{9}{20}+\frac{3}{2}t^2-\frac{3}{2}t+\frac{1}{4}=\frac{3}{2}t^2-\frac{3}{5}t-\frac{1}{20}$$

9. ADE (A)相加有可能為0

10. ABD (D)具有共軛交換性、正定性、線性

7. $\begin{bmatrix} t & a_0 \\ -1 & a_1+t \end{bmatrix}=a_0+a_1t+t^2$, $\begin{bmatrix} t & 0 & a_0 \\ -1 & t & a_1 \\ 0 & -1 & a_2+t \end{bmatrix}=a_0+a_1t+a_2t^2+t^3$

$$\begin{bmatrix} t & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & t & 0 & \cdots 0 & a_1 \\ 0 & -1 & t & \cdots 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & a_{n-1}+t \end{bmatrix}=t\begin{bmatrix} t & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ -1 & t & \cdots & 0 & a_2 \\ 0 & & \ddots & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & a_{n-1}+t \end{bmatrix}+(-1)^{n+1}\times a_0\times\begin{bmatrix} -1 & t & 0 & \cdots & 0 \\ & -1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & -1 \end{bmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

$$=t\begin{bmatrix} \text{"} \end{bmatrix}+(-1)^{n+1}\times a_0\times(-1)^{n-1}$$

$$=t\begin{bmatrix} t & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ -1 & t & \cdots & 0 & a_2 \\ 0 & & \ddots & & \\ 0 & & & & a_{n-1}+t \end{bmatrix}+a_0$$

$$=t^{n-2}(t^2+ta_{n-1}+a_{n-2})+a_0+\cdots+a_{n-3}t^{n-3}$$

$$=t^n+a_0+a_1t+\cdots+a_{n-3}t^{n-3}+a_{n-2}t^{n-2}+a_{n-1}t^{n-1}$$

$$=t^n+\sum_{i=0}^{n-1}a_it^i$$