108台大教學

1、 $\{①,②,③,④\}$ #

2、 $2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ # (前半 $\frac{n}{2}$ 長度有0、1可選)

3
$\binom{2n+1}{n+1} = \binom{2n}{n+1} + \binom{2n}{n}$

$$\binom{A}{B} = 2\binom{2n+1}{n+1} = \frac{(2n+1)\times(2n)\times(2n-1)\times\cdots\cdots\times(2n-n+2)\times\cdots 1}{(n+1)!\,n!} \times \frac{(n+1)}{(n+1)} \times 2$$

$$= \frac{(2n+1)\times(2n)\times(2n-1)\times\cdots\times 1\times(2n+2)}{2(n+1)!\,(n+1)!} = \frac{1}{2}\binom{2n+2}{n+1}$$

$A=(2n+2)$, $B=(n+1)$ #

4. $\binom{n}{1}\binom{n}{0}+\binom{n}{2}\binom{n}{1}+\binom{n}{3}\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n-1}\binom{n}{n-2}+\binom{n}{n}\binom{n}{n-1}$

① 利用組合證法，在2n中分2群

② 一群為n，另一群為n

③ 嘗試從2n中挑n+1個

方法數為 $\binom{n}{1}\binom{n}{n}+\binom{n}{2}\binom{n}{n-1}+\binom{n}{3}\binom{n}{n-2}+\cdots+\binom{n}{n}\binom{n}{1}$

④ ∴ $\binom{A}{B}=\binom{2n}{n+1}$ #

5. $a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n$ $\alpha^2-\alpha-2=(\alpha-2)(\alpha+1)$

$a_n=C_1\cdot 2^n+C_2\cdot(-1)^n$

$\begin{cases} a_0=C_1+C_2 \\ a_1=2C_1-C_2 \end{cases}$ $C_1=\frac{a_0+a_1}{3}$, $C_2=\frac{2a_0-a_1}{3}$

$A=\frac{2a_0-a_1}{3}$

$B=\frac{a_0+a_1}{3}$

$X=1$

$Y=2$ #

6. $x_1>n_1 \Rightarrow x_1$至少要$>n_1+1$ $x_1\ge n_1+1$

$x_2>n_2$ $x_2\ge n_2+1$

$\vdots$

$x_i>n_i$

則原問題列式為 $x_1+x_2+\cdots+x_n=r-n_1-n_2-n_3-\cdots-n_i-i$

$=r-i-\sum_{k=1}^{i}n_i$

$\binom{r-i+(n-1)-\sum_{k=1}^{i}n_i}{n-1} \longrightarrow$ 又i共n項 $\binom{r-1-\sum_{k=1}^{i}n_i}{n-1}$ #

7.

$\neg p=1$, $p=0$.

$p\to q$ 必成立(因$p=0$)

若$q=1$,則結果為false,取$p=0,q=1$則為false $\Rightarrow$ 不是tautology #

8. ~~TFTFT~~ TFTFT

9. ~~TTTTT~~ TTTTT

10. ~~TTFFT~~ TTFFT

8、

(a) 取 True，令 $S=\{\bar{x}_1,\bar{x}_2\}\subset$ U ，U 為 subspace，滿足加法與數乘封閉性，

$span\ S=c_1\bar{x}_1+c_2\bar{x}_2\subset U$

(b) 取 False

反例：$R=\left\{\bar{x}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\bar{y}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\bar{z}=\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}\right\}$，$\bar{x}\notin span\{R\setminus\{\bar{x}\}\}$

(c) 所有向量空間都存在基底，(c) True

(d) 內積空間也是向量空間，令 V 為零維內積空間

$V=span\{\bar{0}\}$，$<\bar{0},\bar{0}>=\|\bar{0}\|^2=0$ ，V 之基底是 ϕ

V 不存在歸一正交基底。(d) False

(e) surjective 為 onto，injective 為一對一

$T:V\to W$

由維度定理 $\dim V=nullity(T)+rank(T)$

$rank(T)=\dim W$ ，(e) True

本題有三個 True。

9、

(a) $A\bar{x}=\bar{0}$ ，A 之元素都是分數，經由高斯消去法，$\bar{x}$ 也是有理數解。(a) True

(b) A 可逆，$|A|\neq 0\Leftrightarrow|\bar{A}|\neq 0$ ，$|\bar{A}|\neq 0$ ，$|\bar{A}^T|\neq 0$ ，A^* 可逆

(c) $rank(A)=\dim row(A)=\dim col(A^T)=rank(A^T)$ ，(c) True

(d) A 可逆，$N(A)=\{\bar{0}\}$ 。A^{-1} 可逆，$N(A^{-1})=\{\bar{0}\}$

$nullity(A)=nullity(A^{-1})$ ，(d) True

(e) $|A^*|=|\bar{A}^T|=|\bar{A}|=\overline{|A|}$ ，(e) True

本題 5 個正確

10、

(a) vector space Q^n 為 A 之特徵空間直和，A 有 n 個線性獨立特徵向量，A 可對角化。(a) True

(b) $A^*A=AA^*$，A 與 A^* 有一組完全相同特徵向量，A 與 A^* 特徵空間相同。(b) True

(c) A 為實對稱矩陣，特徵值必為實數，

但是特徵多項式不一定可因式分解

反例 $A=\begin{bmatrix}3&5&1\\5&13&0\\1&0&1\end{bmatrix}$，$|A-\lambda I|=-(\lambda^3-17\lambda^2+29\lambda-1)$

不能因式分解，(c) False

(d) A 為複數對稱矩陣，特徵值不一定是實數

反例 $A=\begin{bmatrix}i&i\\i&i\end{bmatrix}$，$\lambda=0,2i$ 。(d) False

(e) A 與 B 為 unitary equivalent，$A=PBQ$ ，$P^*=P^{-1}$ ，$Q^*=Q^{-1}$

$A^*A=(PBQ)^*(PBQ)=Q^*B^*P^*PBQ=Q^*B^*BQ$

$t_r(A^*A)=t_r(Q^*B^*BQ)=t_r(Q\cdot Q^*B^*B)=t_r(IB^*B)=t_r(B^*B)$ 。(e) True

本題有 3 個敘述正確。

11.

$$\begin{bmatrix} -15 & -6 & 5 & 9 \\ -12 & 9 & 4 & -2 \\ 20 & 8 & 1 & -12 \\ 18 & -2 & -6 & 3 \end{bmatrix} = A \qquad A^{-1} = \frac{1}{23}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

6 #

12

令有一組 $A = \{u_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, u_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\}$ 為 R^3 之 standed basis

令有一組 $B = \{v_1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, v_1 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\}$ 為 R^2 之 standed basis

令線性轉換為 L

$$\underset{2\times1}{\vec{V}_B} = \underset{2\times3}{[L]_A^B}\ \underset{3\times1}{\vec{V}_A} \qquad 令 [L]_A^B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

$$L\left([u_i]_{3\times1}\right) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} [u_1]_{3\times1} = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} \in R^2$$

$L\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}a_{11}\\a_{12}\end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ 則若要使 $\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{12}\end{bmatrix}$ 為 $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ 或 $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ 杓表達 R^2

$L\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\end{bmatrix}$ ① $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$L\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}a_{13}\\a_{23}\end{bmatrix}$ 依此類推

③ $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ④ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

⑤ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ⑥ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

又①～⑥線性獨立，①～⑥為 L 之 basis